TITLE:

# Hamilton系のカオスと解の複素t平面上の特異点(カオスとその周辺,研究会報告)

AUTHOR(S):

吉田, 春夫

CITATION:
吉田, 春夫. Hamilton系のカオスと解の複素t平面上の特異点(カオスとその周辺,研究会報告). 物性研究 1982, 39(2): B42-B44

ISSUE DATE:
1982-11-20

URL:
http://hdl.handle.net/2433/90779

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

ここで$\hat{\sigma}_i$，$\hat{\rho}^*$は universal function $G(z, y)^{2)}$ を用いて表わすことができ，例えば，

$$\hat{\rho}^*(y) = G(\hat{\varepsilon}(y), 1 + \delta^{-1} y)$$

である（$\delta$は Feigenbaum constant）。詳細は略すが，これらの函数を用いて，次の結果をうる。

$$\hat{X}^{(n+1)}(\omega) \cong \Phi(y) \cdot \tilde{X}^{(n+1)}(\omega) \qquad (*)$$

$$\Phi(y) = \frac{\hat{\sigma}_1(y) - \hat{\sigma}_2(y)\, e^{-i\omega T_{n-1}}}{2\{1 + \hat{\rho}^*(y)\} + \hat{\sigma}_1(y) + \hat{\sigma}_2(y)}$$

ここで，$\hat{X}^{(n+1)}$，$\tilde{X}^{(n+1)}$ はそれぞれ，$X^{(n+1)}(t)$ の $2\pi(2k+1)/T_{n+1}$ 成分と $4\pi(2k+1)/T_{n+1}$ 成分を外挿してえられる函数である。(*)は位相まで含んだ extensive な関係式であるが，実験では絶対値が問題となる。そこで，上記２種の成分の絶対値の２乗を $k$ につき平均したものの比率を $\phi_{n+1}(y)$ とおくと，これは次のような函数となることが導かれる。（ $n \gg 1$ ）

$$\phi_{n+1}(y) \cong \mu^{-2} y \; (0 \leqq y \leqq 1), \quad \mu^{-2} \; (1 \leqq y \leqq y_c)$$

ここで $\mu^2 = 20.963 \cdots$ は Nauenberg-Rudnick の定数である。また $y_c = \delta/(\delta-1) = 1.272 \cdots$ は $r_c$ に対応する $y$ の値である。上の結果は，２変数の強制振動子系の数値計算からえた結果をよく説明している。こうして，フーリエ成分の比率は，良い精度で，台形則に従うパラメーター依存を持つことがわかった。この結果を使うと，$r_c$ にある程度以上近い任意の $r$ に対するフーリエ・スペクトルの形を理論的に構成することができる。

## 文　献

1) M. J. Feigenbaum, Comm. Math. Phys. **77** (1980) 65.
2) H. Daido, Prog. Theor. Phys. **67** (1982) 1698.

# Hamilton 系のカオスと解の複素 t 平面上の特異点

東大・理・天文　　吉 田 春 夫

一般に力学系，特に Hamilton 系が与えられた時それが積分可能であるか否かを有限の手続きで判定する criterion は知られていない。力学系が積分可能であるか否かということが，

解の正則な領域を見る限りその局所的な性質に反映し得ないことは常微分方程式の解の存在定理の普遍性が教える所である。そして通常，解の正則領域ではその概周期性，あるいは高々多項式オーダーでの解の不安定性といったことが積分可能系の１つの特徴となっているが，これら大局的な量は与えられた微分方程式から有限の手続きで実際に計算できる量ではない。しかるに解の特異点（実軸上になければ複素平面内の）に注目するとその局所的な性質に系の積分可能性が反映しえ，その性質は与えられた方程式から直接計算出来るものでありうる。

以上の偏見のもとに関連文献の Review を行った。事の始まりは前世紀末の Kowalevski の研究に始まる。Kowalevski は固定点のまわりの剛体の運動を記述する方程式に対して解が極以外の特異点を持たないという条件（要請）から方程式に表われるパラメーターの値を決めた。しかるにそれらはすべて積分可能な場合となったのである。（数理科学 1981 年 1 月号〝コワレフスカヤのコマ〟参照）

例として Hamilton 系

$$\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\ ,\quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\qquad i=1.2 \tag{1}$$

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{4}(q_1^4+q_2^4)+\frac{\varepsilon}{2}\cdot q_1^2q_2^2\qquad \varepsilon\text{ ：パラメーター}$$

を採る。解の特異点での Laurent 展開

$$q_1=t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}f_nt^n\ ,\quad q_2=t^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}g_nt^n \tag{2}$$

を仮定して方程式に代入すれば展開係数 $f_n$，$g_n$ を決めていく漸化式

$$A_n\boldsymbol{X}_n=\boldsymbol{b}_n \tag{3}$$

但し
$$\boldsymbol{X}_n=\begin{bmatrix}f_n\\ g_n\end{bmatrix},\quad A_n=\begin{bmatrix}(n-1)(n-2)+3f_0^2+\varepsilon g_0^2, & 2\varepsilon f_0g_0\\ 2\varepsilon f_0g_0 & ,\ (n-1)(n-2)+3g_0^2+\varepsilon f_0^2\end{bmatrix}$$

を得る。$\boldsymbol{b}_n$ は $k\leqq n-1$ までの $f_k$，$g_k$ を含む。$f_0$，$g_0$ は本質的に２通りの選択

(i)　$f_0=0$，$g_0=\pm\sqrt{-2}$　，(ii)　$f_0=\pm\sqrt{\dfrac{-2}{1+\varepsilon}}$，$g_0=\pm\sqrt{\dfrac{-2}{1+\varepsilon}}$

がある。方程式(1)は４階の自励系であるから展開(2)が一般解のそれであるとしたら，$t$ の付加定数 $t_0$ 以外に３つの任意定数を展開係数に含まなければならない。一方 $f_0$，$g_0$ のは任意定数を含んでいないので（$\varepsilon=0$ 以外），このことが可能なためには，

(I)　$\det(A_n)$ が３つの非負整数 $n_1$，$n_2$，$n_3$ で０

(Ⅱ) その $n_j$ で $A_n \boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{b}_n$ が不定

とならなければならない。$f_0$，$g_0$ の選択(i)(ii)に応じて直ちに

(i) $\det(A_n) = (n+1)(n-4)\{n^2-3n+2(1-\varepsilon)\}$

(ii) $\det(A_n) = (n+1)(n-4)\{n^2-3n+4\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\}$

を得るので(i), (ii)のどちらかで(I), (Ⅱ)の条件が共に満されるためには $\varepsilon = 0$，1，3 でなければならないことがわかる。一方これらの $\varepsilon$ の値においては Hamiltonian と独立な多項式の第一積分が存在している：

$$\varepsilon = 0 : \Phi = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2) + \frac{1}{4}(q_1^4 - q_2^4) = \text{const}.$$

$$\varepsilon = 1 : \Phi = p_1 q_2 - p_2 q_1 = \text{const}.$$

$$\varepsilon = 3 : \Phi = p_1 p_2 + q_1 q_2 (q_1^2 + q_2^2) = \text{const}.$$

以上の議論で $\varepsilon = 0$，1，3 の場合に $H$ と独立な積分が存在したことは全くの偶然であるのかもしれないことに注意しよう。Kowalevski は以上のような手続きで〝コワレフスカヤのコマ〟を発見した。( Acta. Math. 1889, **12**, 177, 1891, **14**, 81 )

後に Liapounov は Kowalevski の手続きに若干違った解釈をしている ( 1896, in Collected works. tom. **3**, p402 in Russian )。

時が流れてこの不思議な手続きは Hénon-Heiles 系に適用された。( Bountis et al. 1982, Phys. Rev. **A25**, 1257 )。また Toda Lattice の一般化についての適用は独立に Adler. Moerbeke (1982, Comm. Math. Phys. **83**, 83)及び Yoshida ( 1981, RIMS symposium ) でなされた。

筆者自身のこの「現象」の解明に対する部分的な試みは

〝Necessary condition for the existence of algebraic first integrals〟part Ⅰ and part Ⅱ ( to appear )

及び

〝A series of linear 2nd order ordinary differential equations with periodic coefficients for which the characteristic exponents have exact expressions〟( to appear )

で暗になされる予定。前者の概要は数理解析研究所講究録「ソリトンと統計物理学」1982 年 5月 ( 近刊 ) で知ることが出来る。